Exercices et problèmes

1 Déterminer pour chacun des entiers a ci-dessous, l'ensemble D_a de tous ses diviseurs.
$a=-13$; $a=-57$; $a=205$.

2 Le nombre -35763 est-il un multiple de 3 ? de 11 ? de 7 ?

3 1. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 15.
2. Déterminer tous les couples d'entiers (a,b) tels que $a^2-b^2=15$.

4 Déterminer tous les entiers n tels que n divise $n+5$.

5 Déterminer tous les entiers n tels que $n-2$ divise $n-9$.

6 Soit un entier $n\geq 0$.
Montrer que $3^{2n}-2^n$ est un multiple de 7.

7 1. Ecrire la division euclidienne 3171 par 19.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3171 par -19.

8 Déterminer le reste de la division euclidienne de -307 par -7.

9 Déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, le quotient et le reste de la division de a par b.
1. $a=1345791113$ et $b=246812$.
2. $a=-1345791113$ et $b=246812$.
3. $a=1345791113$ et $b=-246812$.
4. $a=-1345791113$ et $b=-246812$.

10 Soit le polynôme
$P(x)=x^4-32x^3+186x^2-280x+125$.

1. Montrer que si n est un entier tel que $P(n)=0$, alors n divise 125.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$.

11 Soit deux entiers non nuls a et b.
On désigne respectivement par q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
Dans chacun des cas, déterminer, si possible a et b.
1. $a+b=44$, $q=6$ et $r=2$.
2. $a+b=-49$, $q=-13$ et $r=11$.
3. $a+b=42$, $q=-6$ et $r=9$.

12 Déterminer les restes modulo 9 de -1, 10, -10, -27 et -25.

13 Déterminer les entiers n dans chacun des cas ci-dessous.
a. $n\equiv -2\ (\mathrm{mod}\ 7)$ et $-10\leq n\leq 15$.
b. $n\equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 11)$ et $-6\leq n\leq 20$.

14 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1, non divisible par 3.
Montrer que $n+1$ ou $n-1$ est divisible par 3.
2. Soit n et p deux entiers naturels, montrer que l'un des entiers n , p , $n-p$ ou $n+p$ est divisible par 3.

15 Soit deux entiers a et b tels que $a\equiv 3\ (\mathrm{mod}15)$ et $b\equiv 11\ (\mathrm{mod}15)$.
Déterminer les restes modulo 15 de
$a+b$, $a-b$, $-a$, ab, $-a^2b$ et ab^2.

16 Soit trois entiers a, b et c tels que
$a\equiv 2\ (\mathrm{mod}17)$, $b\equiv 4\ (\mathrm{mod}17)$ et $c\equiv 5\ (\mathrm{mod}17)$.
Déterminer les restes modulo 17 de
$a+bc$ et $a^2+b^2+c^2$.

Exercices et problèmes

17 Soit deux entiers a et b tels que $a \equiv 5 \pmod 4$ et $b \equiv 2 \pmod 4$.

Déterminer le reste modulo 4 de $3a^2 + ab - 9$.

18 Soit un entier a tel que $a \equiv 7 \pmod{11}$.

Déterminer le reste modulo 11 de $a(a+1)(a+2)$.

19 1. Montrer que

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. En déduire le reste modulo 7 de $1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2$.

20 Déterminer le reste modulo 10 de chacun des entiers 30757, 15163 et 12924.

21 Déterminer les restes modulo 17 de 171^{171}, 186^{186}, 356^{583}.

22 1. Déterminer le reste modulo 10 de -1.

2. Déterminer le chiffre des unités de 9^{2007} et 9^{2008}.

23 Déterminer les restes modulo 16 de chacun des entiers 49^{316}, 15^{2008} et $(-49)^{237}$.

24 Déterminer le reste modulo 13 de 4^3 et de 121^{357}.

25 1. Déterminer le reste modulo 7 de 50^{99}.

2. Déterminer le reste modulo 17 de 50^{99}.

26 Déterminer le reste modulo 7 de $19^{52} \times 23^{41}$.

27 1. Déterminer le reste modulo 13 de 5^4.

2. En déduire les restes modulo 13 de chacun des entiers 5^{4k}, 5^{4k+1}, 5^{4k+2}, 5^{4k+3} avec $k \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer les restes modulo 13 de chacun des entiers $5^{202020202041}$ et $5^{555555555555}$.

4. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n, tels que $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$.

28 1. Déterminer les restes modulo 5 de -1 et de -2.

2. En déduire que $1^{2099} + 2^{2099} + 3^{2099} + 4^{2099}$ est divisible par 5.

29 1. Vérifier que $999 \equiv 0 \pmod{27}$.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $10^{3n} \equiv 1 \pmod{27}$.

b. En déduire le reste modulo 27 de $10^{100} + 100^{10}$.

30 Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $2^n \equiv 1 \pmod 5$, si et seulement si, n est multiple de 4.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $2^n \equiv 1 \pmod{11}$.

31 Soit n un entier.

Quels sont les restes possibles modulo 5 de n^2 ?

Quels sont les restes possibles modulo 7 de n^3 ?

32 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $2x \equiv 4 \pmod{10}$.

b. $4x \equiv 8 \pmod{10}$.

33 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $x^2 \equiv 0 \pmod 4$.

b. $x^2 \equiv 2 \pmod 4$.

c. $x^2 \equiv 3 \pmod 4$.

Exercices et problèmes

34 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $x^2 \equiv 4 \pmod{11}$.

b. $x^2 \equiv -1 \pmod{11}$.

c. $x^2 \equiv -2 \pmod{11}$.

35 Déterminer tous les entiers a et b tels que $ab \equiv -2 \pmod{8}$.

36 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $x^2 + 6x + 5 \equiv 0 \pmod{7}$.

b. $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \pmod{8}$.

37 1. Vérifier que $10^{20} \equiv 1 \pmod{11}$.

2. En déduire le reste modulo 11 de 99999999999999999995.

38 Déterminer le reste modulo 103 de $10^{102} + 3 \times 10^{204} + 106 \times 10^{612}$.

39 Soit x un entier naturel.

1. Vérifier que $x\left(x^4 - 1\right) \equiv 0 \pmod{5}$. En déduire le reste modulo 5 de $\left(x^4 - x^2\right)\left(x^2 + 1\right)$.

2. Vérifier que $x\left(x^6 - 1\right) \equiv 0 \pmod{7}$. En déduire le reste modulo 7 de $\left(x^8 - x^5\right)\left(x^3 + 1\right)$.

40 Soit p un nombre premier et a un entier naturel non divisible par p. Déterminer les restes modulo p de a^{p-1}, $a^{p-1} - 2$ et $2a^{10p-10} - 3$.

41 1. Soit un entier $n \geq 0$.

a. Déterminer le reste modulo 111 de 1000.

b. Montrer que les restes modulo 111 de n et 1000n sont égaux.

c. En déduire, sans utiliser la calculatrice, que chacun des nombres 111111, 100010001 et 100010000001 est divisible par 111.

2. Démontrer que 1001001001001 est divisible par 11111.

42 Soit n un entier naturel.

Quel est le reste modulo 4 de $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$?

43 Soit n un entier naturel.

1. Déterminer pour tout entier n de $\{0, 1, ..., 6\}$ le reste modulo 7 de 3^n.

2. Montrer que $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

3. a. Calculer le reste modulo 7 de 3^{1000}.

b. Quelle est le chiffre des unités de 3^{1000} ?

c. Soit c la somme des diviseurs du nombre 3^{1000}. Quel est le reste modulo 7 de c.

44 Soit a et b deux entiers.

1. Vérifier que, $a^3 \equiv a \pmod{3}$.

2. Montrer les équivalences ci-dessous.

$a^3 - b^3 \equiv 0 \pmod{3}$ équivaut à $a - b \equiv 0 \pmod{3}$.

$a^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{3}$ équivaut à $a + b \equiv 0 \pmod{3}$.

$a^3 + 2b^3 \equiv 0 \pmod{3}$ équivaut à $a + 2b \equiv 0 \pmod{3}$.

45 Soit a un entier.

1. Déterminer les restes modulo 11 de a, a^2, a^3.

2. En déduire que $a^3 - b^3 \equiv 0 \pmod{11}$, si et seulement si, $a - b \equiv 0 \pmod{11}$.

46 Soit n un entier naturel non nul.

Montrer par récurrence que,

a. $16^n \equiv 1 - 10n \pmod{25}$,

b. $7^n \equiv 6n + 1 \pmod{36}$,

c. $4^n \equiv 3n + 1 \pmod{9}$,

d. $2^n + 3^n \equiv 5^n \pmod{6}$.

47 Soit un entier $n \geq 4$. On se propose d'étudier les solutions entières de l'équation $(E) : x^2 + 9 = 2^n$.

On suppose que (E) possède une solution entière notée a.

1. Montrer que $a \equiv 1 \pmod 2$.
2. En déduire que $a^2 + 9 \equiv 2 \pmod 4$.
3. Montrer que (E) n'admet pas de solution.

48 Soit un entier n impair.

On se propose d'étudier les solutions entières de l'équation $(E) : x^2 + 9 = 3^n$.

On suppose que (E) possède une solution entière notée a.

1. Montrer que $a \equiv 0 \pmod 2$.
2. En déduire que $a^2 + 9 \equiv 1 \pmod 4$.
3. Montrer que $3^n \equiv 3 \pmod 4$.
4. En déduire que (E) n'admet pas de solution.

49 Les nombres de Fermat sont définis par $F_n = 2^{(2^n)} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Fermat pensait qu' ils étaient tous premiers. En fait les cinq premiers $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$ sont premiers et le sixième F_5 ne l'est pas.

On va montrer sans calculer explicitement F_5, que 641 divise F_5.

1. Vérifier les égalités $641 = 5 \times 2^7 + 1 = 5^4 + 2^4$.
2. Montrer que $5 \times 2^7 \equiv -1 \pmod{641}$,
$5^4 \times 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$ et $5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$.
3. En déduire que 641 divise $2^{32} + 1 = F_5$.

50 Soit n un entier. On désigne par $f(n)$ la somme des chiffres de n.

1. Montrer que $n \equiv f(n) \pmod 9$.

On pose $N = 4444^{4444}$.

2. a. Montrer que $4444 \equiv 7 \pmod 9$.
b. Ecrire la division euclidienne de 4444 par 3.
c. En déduire que $4444^{4444} \equiv 7 \pmod 9$
d. Montrer que $f(f(N)) \equiv 7 \pmod 9$.
3. a. Vérifier que $N < \left(10^4\right)^{5.10^3}$,
en déduire que $N \leq 10^{20000}$ puis que $f(N) \leq 180000$.
b. Montrer que $f(f(N)) \leq 54$.
4. Montrer que $f(f(f(N))) = 7$.

CH 7 DIVISIBILITE DANS Z

QCM

1. Le quotient de -20 par 7 est -3
2. Pour tout entier n : $n^3-n\equiv 0(6)$
3. Le nombre 100! Est divisible par 2^{50}
4. Soit a un entier non nul.
   Si $a\equiv 19(20)$ alors $a\equiv -1(20)$ alors $a^{402}\equiv(-1)^{402}(20)\Rightarrow a^{402}\equiv 1(20)$

VRAI-FAUX

1. a/ si $a\equiv 1(n)$ alors $a^2\equiv 1^2(n)$ donc $a^2\equiv 1(n)$ ***Vrai***
   b/ si $a^2\equiv 0(n)$ alors $a\equiv 0(n)$ *Faux* (contre exemple :a=2 et n=4)
   c/ si $2a\equiv 4(10)$ alors $a\equiv 2(10)$ *Faux* (contre exemple :a=7)
2. Pour tout entier a et pour tout entier non nul n , $a^n\equiv a(n)$ *FAUX*
   Contre exemple :a=2 et n=4
3. Il existe un entier b non nul tel que $5b = 0(10)$ VRAI b=2 (par exemple)

CH 7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 1 : 13 est un nombre premier $D_{-13} = \{\pm1 ; \pm13\}$

$57=3\times19$ $D_{57}= \{\pm1 ; \pm3 ; \pm19 ; \pm57\}$

$205=5\times41$ $D_{205}= \{\pm1 ; \pm5 ; \pm41 ; \pm205\}$

EX 2 : Le nombre -35763 est un multiple de 3 et de 7 et n'est pas multiple de 11

EX 3 : 1. $15=3\times5$ $D_{15}=\{\pm1 ;\pm3 ;\pm5 ;\pm15\}$

2. $a^2-b^2 = 15 \Leftrightarrow (a-b)\times(a+b)=15$

$$\begin{cases}a-b=1\\a+b=15\end{cases} ou \begin{cases}a-b=15\\a+b=1\end{cases} ou \begin{cases}a-b=3\\a+b=5\end{cases} ou \begin{cases}a-b=5\\a+b=3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow ou \begin{cases}a-b=-1\\a+b=-15\end{cases} ou \begin{cases}a-b=-15\\a+b=-1\end{cases} ou \begin{cases}a-b=-3\\a+b=-5\end{cases} ou \begin{cases}a-b=-5\\a+b=-3\end{cases}$$

Tous les couples (a,b) / $a^2-b^2 = 15$ sont : (8,7) ;(8,-7) ;(4,1) ;(4,-1) ;
(-8,-7) ;(-8,7) ;(-4,-1) ;(-4,1)

EX 4 : tout entier non nul n divise n ; donc si n divise n+5 alors n divise (n+5)-n=5

Donc $n=\pm1$ ou $n=\pm5$

EX5 : n-2 divise n-2 ;donc si n-2 divise n-9 Alors n-2 divise (n-9)-(n-2)=-7 donc

$n-2=\pm1$ ou $n-2=\pm7$ Donc $n\in\{1,3,-5,9\}$

EX6 : On a $3^2=9\equiv2(7)\Rightarrow(3^2)^n\equiv2^n\ (7)\Rightarrow(3^2)^n-2^n\equiv0(7)$ donc $(3^2)^n-2^n$ est un multiple de 7

EX7 : 1. $3171=19\times166+17$(calculatrice : taper 3171 ab/c 19)

2. $3171= (-19)\times(-166)+17\Rightarrow$le reste de la division euclidienne de 3171 par -19 est 17

EX8 : $307=7\times43+6 \Rightarrow -307=(-7)\times43-6\Rightarrow -307=(-7)\times44+1\Rightarrow$ le reste de la division euclidienne de (-307) par (-7) est 1.

EX9 :

$1345791113 = 246812 \times 5452 + 172089 \Rightarrow q=5452$ et $r=172089$

$-1345791113 = 246812 \times (-5451) + 74723 \Rightarrow q=-5451$ et $r=74723$

$1345791113 = -246812 \times(- 5452) + 172089 \Rightarrow q=-5452$ et $r=172089$

$-1345791113 = -246812 \times(5453) + 74723 \Rightarrow q=5453$ et $r=74723$

EX 10 :

1. $P(n)=0\Leftrightarrow n^4-32n^3+186n^2-280n=-125\Leftrightarrow n(-n^3+32n^2-186n+280)=125\Rightarrow n|125$
2. D'après 1. les racines entiers naturels possibles de P sont : 1 ;5 :25 et 125
   Une simple vérification permet de conclure que 1 ;5 et 25 sont des racines de P
   Donc $P(x)=(x-1)(x-5)(x-25)(x-a)$
   Donc $P(x)=(x-1)(x-5)(x-25)(x-1)$ Donc $S_{IR}=\{1,5,25\}$

CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 11 :

1. a+b=44 q=6 r=2 a=b.q+r

   ⇓

   b.q+r+b=44⇒b.(q+1)+r=44⇒b.7+2=44⇒b=6 ⇒a=44-6=38

2. a+b=-49 q=-13 r=11 a=b.q+r

   ⇓

   b.q+r+b=-49⇒b.(q+1)+r=-49⇒b.(-12)+11=-49⇒b=5<11=r impossible

3. a+b=42 q=-6 r=9 a=b.q+r

   ⇓

   b.q+r+b=42⇒b.(q+1)+r=42⇒b.(-5)+9=42⇒-5b=33 impossible

EX 12 :

-1=9.(-1)+8⇒-1≡8(9) ⇒ le reste modulo 9 de (-1) est 8

10= 9x1 +1⇒10≡1(9) ⇒ le reste modulo 9 de (10) est 1

-10= 9x(-2) +8⇒−10≡8(9) ⇒ le reste modulo 9 de (-10) est 8

-27= 9x(-3) -27 est un multiple de 9 ⇒ le reste modulo 9 de (-27) est 0

-25=9x(-3)+2⇒−25≡2(9) ⇒ le reste modulo 9 de (-25) est 2

EX 13 :

• n≡-2(7) ⇒n=7k-2

-10≤n≤15 ⇔ -10≤7k-2≤15 ⇔-8≤7k≤17⇔ $-\frac{8}{7} \le k \le \frac{17}{7}$ ⇒ k∈{-1,1,0,2}

⇒n∈{-9,5,-2,12}

• n≡6(11) ⇒n= 11k+6

-6≤n≤20⇔-6≤11k+6≤20 ⇔-12≤11k≤14⇒k∈{-1,0,1}⇒n∈{-5,6,17}

EX 14 :

1. n non divisible par 3 ⇒n≡1(3) ou n≡2(3) ⇒n-1≡0(3) ou n+1≡0(3)

   ⇒n-1 ou n+1 est divisible par 3

2. Supposons que n ;p et n-p ne sont pas divisibles par 3 Alors

   $\begin{cases} n \equiv 1(3) \\ p \equiv 2(3) \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} n \equiv 2(3) \\ p \equiv 1(3) \end{cases}$ ⇒n+p≡0(3) ou n+p≡0(3)⇒n+p est divisible par 3

CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 15 :

$a\equiv 3(15)$ et $b\equiv 11(15)\Rightarrow a+b\equiv 14(15)\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de a+b est 14

$a\equiv 3(15)$ et $b\equiv 11(15)\Rightarrow a-b\equiv -8(15)\Rightarrow a-b\equiv 7(15)\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de a-b est 7

$a\equiv 3(15)\Rightarrow -a\equiv -3(15)\Rightarrow -a\equiv 12(3)\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de -a est 12

$a\equiv 3(15)$ et $b\equiv 11(15)\Rightarrow a.b\equiv 33(15)\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de a.b est 3

$a\equiv 3(15)\Rightarrow -a^2\equiv -9(15)\Rightarrow -a^2\equiv 6(15)\Rightarrow -a^2.b\equiv 66(15)\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de $-a^2.b$ est 6

$b\equiv 11(15)\Rightarrow b^2\equiv 11^2(15)\Rightarrow b^2\equiv 121(15)\Rightarrow b^2\equiv 1(15)\Rightarrow ab^2\equiv 3(15)$

$\Rightarrow$ Le reste modulo 15 de ab^2 est 3

EX 16 :

- $b\equiv 4(17)$ et $c\equiv 5(17)\Rightarrow b.c\equiv 20(17)\mathbb{Z}\Rightarrow b.c\equiv 3(17)$ et comme $a\equiv 2(17)\Rightarrow a+bc\equiv 5(17)$
  Donc le reste modulo 17 de a+bc est 5.
- $a\equiv 2(17)\Rightarrow a^2\equiv 2^2(17)\Rightarrow a^2\equiv 4(17)$
  $b\equiv 4(17)\Rightarrow b^2\equiv 16(17)\Rightarrow b^2\equiv -1(17)$ Alors $a^2+b^2+c^2\equiv 4-1+8(17)$ Donc le reste
  $c\equiv 5(17)\Rightarrow c^2\equiv 25(17)\Rightarrow c^2\equiv 8(17)$ modulo 17 de $a^2+b^2+c^2$ est 11.

EX 17 :

$\begin{cases} a\equiv 5(4) \\ b\equiv 2(4) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2\equiv 25(4) \\ a.b\equiv 10(4) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2\equiv 1(4) \\ a.b\equiv 10(4) \end{cases}\Rightarrow 3a^2+ab-9\equiv 3+10-9(4)$ Donc le reste modulo 4 de $3a^2+ab-9$ est 0.

EX 18 :

$a\equiv 7(11)\Rightarrow a+1\equiv 8(11)$ et $a+2\equiv 9(11)\Rightarrow a.(a+1)(a+2)\equiv 7x8x9\ (11)\Rightarrow a(a+1)(a+2)\equiv 504(11)$
Donc le reste modulo 11 de a.(a+1)(a+2) est 9 ($504=11x45+9$)

EX 19 :

1. (par récurrence)
   - pour n=1 $1^2+2^2+\ldots+n^2=1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=1$ donc la proprieté est vrai pour n=1
   - Soit $n\in\mathbb{N}^*$ Supposons que ..... et montrons que .....(facile)
2. D'après 1. $1^2+2^2+\ldots+100^2=\frac{100.101.201}{6}=50.101.67\equiv 1.3.4(7)$ (car $50\equiv 1(7)$ ...)
   Donc le reste modulo 7 De $1^2+2^2+\ldots+100^2$ est 5

CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 20 :

- Le reste modulo 10 de 30757 est 7
- Le reste modulo 10 de 15163 est 3
- Le reste modulo 10 de 12924 est 4

EX 21 :

- $171 \equiv 1(17) \Rightarrow 171^{171} \equiv 1^{171}(17)$ Donc Le reste modulo 17 de 171^{171} est 1
- $186 \equiv -1(17) \Rightarrow 186^{186} \equiv (-1)^{186}(17)$ Donc Le reste modulo 17 de 186^{186} est 1
- $356 \equiv -1(17) \Rightarrow 356^{583} \equiv (-1)^{583}(17)$ Donc Le reste modulo 17 de 356^{583} est 16

EX 22 :

1. $-1 = 10x(-1)+9$ Donc Le reste modulo 10 de (-1) est 9
2. $9 \equiv -1\ (10) \Rightarrow 9^{2007} \equiv (-1)^{2007}(10)$ Donc Le reste modulo 10 de 9^{2007} est 9
   $9 \equiv -1\ (10) \Rightarrow 9^{2008} \equiv (-1)^{2008}(10)$ Donc Le reste modulo 10 de 9^{2008} est 1

EX 23 :

- $49 \equiv 1(16) \Rightarrow 49^{316} \equiv 1^{316}(16)$ Donc Le reste modulo 16 de 49^{316} est 1
- $15 \equiv -1\ (16) \Rightarrow 15^{2008} \equiv (-1)^{2008}(16)$ Donc Le reste modulo 16 de 15^{2008} est 1
- $-49 \equiv -1(16) \Rightarrow (-49)^{236} \equiv (-1)^{236}(16)$ Donc Le reste modulo 16 de $(-49)^{236}$ est 1

EX 24 :

- $4^2 = 16 \equiv 3(13) \Rightarrow 4^3 \equiv 4x3(13)$ Donc Le reste modulo 13 de 4^3 est 12
- $121 \equiv 4(13) \Rightarrow 121^{357} \equiv 4^{357}(13) \Rightarrow 121^{357} \equiv (4^3)^{119}(13) \Rightarrow 121^{357} \equiv (-1)^{119}(13)$
  Donc Le reste modulo 13 de 121^{357} est 12

EX 25 :

1. $50 \equiv 1(7) \Rightarrow 50^{99} \equiv 1^{99}(7) \Rightarrow 50^{99} \equiv 1(7) \Rightarrow$ Le reste modulo 7 de 50^{99} est 1
2. $50 \equiv -1(17) \Rightarrow 50^{99} \equiv (-1)^{99}(17) \Rightarrow 50^{99} \equiv -1(17) \Rightarrow$ Le reste modulo 17 de 50^{99} est 16

EX 26 :

$19 \equiv (-2)\ (7) \Rightarrow 19^{52} \equiv (-2)^{52}\ (7) \Rightarrow 19^{52} \equiv (2)^{52}\ (7)$ et $23 \equiv 2\ (7) \Rightarrow 23^{41} \equiv 2^{41}\ (7)$

Alors $19^{52}.23^{41} \equiv 2^{52+41}\ (7) \Rightarrow 19^{52}.23^{41} \equiv 2^{93}\ (7) \Rightarrow 19^{52}.23^{41} \equiv (2^3)^{31}(7) \Rightarrow 19^{52}.23^{41} \equiv 1^{31}\ (7)$

Donc le reste modulo 7 de $19^{52}.23^{41}$ est 1

CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 27 :

1. $5^2=25\equiv -1(13)\Rightarrow 5^4\equiv(-1)^2(13)\Rightarrow 5^4\equiv 1(13)$ ⇒le reste modulo 13 de 5^4 est 1
2. • $5^{4k}=(5^4)^k\equiv 1^k(13)$ ⇒le reste modulo 13 de 5^{4k} est 1
   • $5^{4k+1}=(5^4)^k.5\equiv 1^k.5(13)$ ⇒le reste modulo 13 de 5^{4k+1} est 5
   • $5^{4k+2}=(5^4)^k.25\equiv 1^k.25(13)\Rightarrow 5^{4k+2}\equiv -1(13)$ le reste modulo 13 de 5^{4k+2} est 12
   • $5^{4k+3}=(5^{4k+2}).5\equiv(-1).5(13)\Rightarrow 5^{4k+3}\equiv -5(13)$ le reste modulo 13 de 5^{4k+3} est 8
3. $41\equiv 1(4)\Rightarrow 5^{202020202041}=5^{4k+1}$ donc le reste modulo 13 de $5^{202020202041}$ est 5
   $55\equiv 3(4)\Rightarrow 5^{555555555555}=5^{4k+3}$ donc le reste modulo 13 de $5^{555555555555}$ est 8
4. pour n=4k $5^{2n}+5^n\equiv 1+1(13)$
   Pour n=4k+1 $5^{2n}+5^n\equiv -1+5(13)$
   Pour n=4k+2 $5^{2n}+5^n\equiv 1+12(13)\Rightarrow 5^{2n}+5^n\equiv 0(13)$
   Pour n=4k+3 $5^{2n}+5^n\equiv -1+8(13)\Rightarrow 5^{2n}+5^n\equiv 7(13)$

Conclusion : l'ensemble des entiers n tels que $5^{2n}+5^n\equiv 0(13)$ est $\{4k+2 ; k\in \mathbb{N}\}$

EX 28 :

$-1=5x(-1)+4$ Donc le reste modulo 5 de (-1) est 4 $\Rightarrow 4\equiv -1(5)\Rightarrow 4^{2099}\equiv(-1)^{2099}(5)$

$-2=5x(-1)+3$ Donc le reste modulo 5 de (-2) est 3 $\Rightarrow 3\equiv -2(5)\Rightarrow 3^{2099}\equiv(-2)^{2099}(5)$

Alors $1^{2099}+2^{2099}+3^{2099}+4^{2099}\equiv 1^{2099}+2^{2099}+(-2)^{2099}+(-1)^{2099}(5)$

$\equiv 0(5)$

Donc $1^{2099}+2^{2099}+3^{2099}+4^{2099}$ est divisible par 5

EX 29 :

1. $999=27x37+0\Rightarrow 999\equiv 0(27)$
2. $999\equiv 0(27)\Rightarrow 1000\equiv 1(27)\Rightarrow 10^3\equiv 1(27)\Rightarrow (10^3)^n\equiv 1^n(27)\Rightarrow 10^{3n}\equiv 1(27)$
3. $10^{100}=10.10^{3x33}\equiv 10(27)$ et $100^{10}=10^{20}=100.10^{3x6}\equiv 100(27)$ Alors

$10^{100}+100^{10}\equiv 10+100(27)\Rightarrow 10^{100}+100^{10}\equiv 2(27)$

Conclusion : le reste modulo 27 de $10^{100}+100^{10}$ est 2

EX 30 : $2^4\equiv 1(5)$ (th de Fermat)

Si n est un multiple de $4\Rightarrow n=4k\Rightarrow 2^n=(2^4)^k\equiv 1^k(5)\Rightarrow 2^n\equiv 1(5)$

Si n n'est pas multiple de 4 $\Rightarrow \begin{cases} n=4k+1\Rightarrow 2^n=2^{4k+1}=2^{4k}\times 2\equiv 2(5) \\ n=4k+2\Rightarrow 2^n=2^{4k+2}=2^{4k}\times 4\equiv 4(5) \\ n=4k+3\Rightarrow 2^n=2^{4k+3}=2^{4k}\times 8\equiv 3(5) \end{cases}$ Alors 2^n n'est pas congru à 1 modulo 5

Conclusion : $2^n\equiv 1(5)$ ssi n est un multiple de 4

Un travail analogue permet de conclure que : $2^n\equiv 1(11)$ ssi n est un multiple de 10

CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 31 :

Tableau de congruence

Reste modulo 5 de n	0	1	2	3	4
Reste modulo 5 de n^2	0	1	4	4	1

Conclusion : Les restes possibles modulo 5 de n^2 sont : 0 ;1 et 4

Tableau de congruence

Reste modulo 7 de n	0	1	2	3	4	5	6
Reste modulo 7 de n^3	0	1	1	6	1	6	6

Conclusion : Les restes possibles modulo 7 de n^3 sont : 0 ;1 et 6

EX 32 :

Tableau de congruence

Reste modulo 10 de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Reste modulo 10 de 2x	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
Reste modulo 10 de 4x	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6

a/ $2x \equiv 4(10)$ $S_{\mathbb{Z}} = \{10k+2 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{10k+7 ; k \in \mathbb{Z}\}$

b/ $4x \equiv 8(10)$ $S_{\mathbb{Z}} = \{10k+2 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{10k+7 ; k \in \mathbb{Z}\}$

EX 33 :

Tableau de congruence

Reste modulo 4 de x	0	1	2	3
Reste modulo 4 de x^2	0	1	0	1

a/ $x^2 \equiv 0\ (4)$ $S_{\mathbb{Z}} = \{4k ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{4k+2 ; k \in \mathbb{Z}\}$

b/ $x^2 \equiv 2(4)$ $S_{\mathbb{Z}} = \varnothing$ c/ $x^2 \equiv 3(4)$ $S_{\mathbb{Z}} = \varnothing$

EX 34 :

Reste modulo11 de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste modulo11 de x^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

a/ $x^2 \equiv 4\ (11)$ $S_{\mathbb{Z}} = \{11k+2 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{11k+9 ; k \in \mathbb{Z}\}$

b/ $x^2 \equiv -1(11) \Leftrightarrow x^2 \equiv 10(11)$ $S_{\mathbb{Z}} = \varnothing$

Reste modulo19 de x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Reste modulo19 de x^2	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1

c/ $x^2 \equiv -2(19) \Leftrightarrow x^2 \equiv 17(19)$ $S_{\mathbb{Z}} = \{19k+6 ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{19k+13 ; k \in \mathbb{Z}\}$

CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 35 :

Notons respectivement r et r' les restes modulo 8 de a et b

Les valeurs possibles de rr' sont consignées dans le tableau ci-dessous.

$a.b\equiv -2(8)\Leftrightarrow a.b\equiv 6(8)\Leftrightarrow r.r'\equiv 6(8)$

On conclut de ce tableau que :

\r / r'	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

$a.b\equiv -2(8)$ ssi

$a\equiv 1(8)$ et $b\equiv 6(8)$ ou
$a\equiv 2(8)$ et $b\equiv 3(8)$ ou $a\equiv 2(8)$ et $b\equiv 7(8)$ ou
$a\equiv 3(8)$ et $b\equiv 2(8)$ ou
$a\equiv 5(8)$ et $b\equiv 6(8)$ ou
$a\equiv 6(8)$ et $b\equiv 1(8)$ ou $a\equiv 6(8)$ et $b\equiv 5(8)$ ou
$a\equiv 7(8)$ et $b\equiv 2(8)$

EX 36 : a/

Reste modulo 7 de x	0	1	2	3	4	5	6
Reste modulo 7 de x^2+6x+5	5	5	0	4	3	4	0

$S_{\mathbb{Z}}=\{7k+2\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{7k+6\ ;k\in\mathbb{Z}\}$

b/

Reste modulo 8 de x	0	1	2	3	4	5	6	7
Reste modulo 8 de x^2-4x+3	3	0	7	0	3	0	7	0

$S_{\mathbb{Z}}=\{8k+1\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{8k+3\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{8k+5\ ;k\in\mathbb{Z}\}\cup\{8k+7;k\in\mathbb{Z}\}$

EX 37 :

1. $10\equiv -1(11)\Rightarrow 10^{20}\equiv(-1)^{20}(11)\Rightarrow 10^{20}\equiv 1(11)$
2. $9999999999999999995=10^{20}-5\equiv 1-5(11)$ Donc le reste modulo 11 de
   $\equiv 7(11)$ 9999999999999999995 est 7

EX38 :

$10^{102}\equiv 1(103)$ (th de Fermat) Alors
$10^{204}=(10^{102})^2\equiv 1(103)$ et $10^{612}=(10^{102})^6\equiv 1(103)$ Donc
$10^{102}+3.\ 10^{204}\ 106.10^{612}\equiv 1+3+106\ (103)$ Donc le reste modulo 103 de
$10^{102}+3.\ 10^{204}\ 106.10^{612}$ est 7

EX 39 :

1. • si 5 divise x alors $x\equiv 0(5)\Rightarrow x.(x^4-1)\equiv 0(5)$
   • si 5 ne divise pas x alors (d'après Fermat) $x^4\equiv 1(5)\Rightarrow x.(x^4-1)\equiv 0(5)$

   Donc pour tout entier naturel x on a : $x.(x^4-1)\equiv 0(5)$

   $(x^4-x^2).(x^2+1)=x^2.(x^2-1).(x^2+1)=x.[x.(x^4-1)]\equiv 0(5)$
2. de même que 1. $(x^8-x^5)(x^3+1)=x^4.[x.(x^6-1)]$

CH7 DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

EX 40 :

p premier et a non divisible par p alors d'après Fermat $a^{p-1}\equiv 1(p)$

Donc le reste modulo p de a^{p-1} est 1.

Le reste modulo p de a^{p-1} -2 est p-1 (1-2=-1≡p-1(p))

$2a^{10p-10}-2=2.(a^{p-1})^{10}-3\equiv 2.1-3(p)$ donc Le reste modulo p de a^{10p-10} -3 est p-1

EX 41 :

1. a/ 1000=111x9+1 donc le reste modulo 111 de 1000 est 1

   b/ $1000\equiv 1(111)\Rightarrow 1000.n\equiv n(111)$ donc n et 1000.n ont le même reste mod 111

   c/ • 111111=111x1000+111 111 et 111x1000 sont divisibles par 111 alors 111111 est divisibles par 111

   • 100010001=100010x1000+1≡100010+1(111) d'après b/
   ≡100x1000+10+1(111)
   ≡100+10+1 (111)
   ≡111(111)
   ≡0(111) Donc 100010001 est divisible par 111

   • 100010000001=100010000x1000+1≡100010000+1(111)
   ≡100010001(111)
   ≡0(111)

2. 100 000=9x11111+1⇒100 000≡1(11111)⇒100 000n≡n(11111)
   1001001001001=10010010x100 000+1001≡10010010+1001(11111)
   ≡100x100 000+10010+1001(11111)
   ≡100+10010+1001(11111)
   ≡11111(11111)
   ≡0(11111)

EX 42 :

Pour n=o $1^n+2^n+3^n+4^n=1+1+1+1=4$ le reste modulo 4 est 0

Pour n=1 $1^n+2^n+3^n+4^n=1+2+3+4=10$ le reste modulo 4 est 2

Pour n≥2 • si n est pair $1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 1+0+(-1)^n+0(4)$
≡2(4)

• si n est impair $1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 1+0+(-1)^n+0(4)$
≡1+(-1)(4)
≡0(4)

Conclusion : les restes possibles modulo 4 de $1^n+2^n+3^n+4^n$ sont 0 et 2

CH7 DIVISIBILITE DANS Z

EX 43 :

1. $3^0=1\equiv1(7)$; $3^1=3\equiv3(7)$; $3^2=9\equiv2(7)$; $3^3=27\equiv6(7)$; $3^4\equiv4(7)$; $3^5\equiv5(7)$; $3^6\equiv1(7)$
2. on a $3^6\equiv1(7)\Rightarrow3^6-1\equiv0(7)\Rightarrow 3^n.(3^6-1)\equiv0(7)\Rightarrow3^{n+6}-3^n\equiv0(7)\Rightarrow 3^{n+6}-3^n$ divible par7
3. a/ $3^{1000}=3^{6x166+4}=(3^6)^{166}.3^4\equiv1^{166}.4(7)\Rightarrow$ le reste modulo 4 de 3^{1000} est 4

   b/ on a $3^4=81\equiv1(10)\Rightarrow(3^4)^{250}\equiv1^{250}(10)\Rightarrow3^{1000}\equiv1(10)$ Donc le chiffre des unités de 3^{1000} est 1.

EX 44 :

1. D'après ce tableau de congruence on Constate que $a^3\equiv a(3)$

Reste modulo 3 de a	0	1	2
Reste modulo 3 de a^3	0	1	2

2. $a^3-b^3\equiv0(3)\Leftrightarrow a^3\equiv b^3(3)\Leftrightarrow a\equiv b\ (3\ )$ (d'après 1.)$\Leftrightarrow a-b\equiv0(3)$

   On a $a^3\equiv a(3)$ et $b^3\equiv b(3)$ Alors $a^3+b^3\equiv0(3)\Leftrightarrow a+b\equiv0(3)$

   On a $a^3\equiv a(3)$ et $b^3\equiv b(3)$ Alors $a^3+2b^3\equiv0(3)\Leftrightarrow a+2b\equiv0(3)$

Ex 45 :

D'après ce tableau de congruence il n'ya pas deux Valeurs distincts du reste modulo 11 de a qui donnent le même reste modulo 11 de a^3 donc

Reste modulo 11 de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste modulo 11 de a^2	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
Reste modulo 11 de a^3	0	1	8	5	9	4	7	2	6	3	10

$a^3\equiv b^3(11)$ ssi $a\equiv b\ (11\ )$ c-a-d $a^3-b^3\equiv0(11)$ ssi $a-b\equiv0(11)$

EX 47 :

1. a solution de (E) $\Rightarrow a^2+9=2^n\Rightarrow a^2$ impair $\Rightarrow$ a impair$\Rightarrow a\equiv1(2)$
2. $a\equiv1(2)\Rightarrow a^2=4k^2+4k+1\Rightarrow a^2\equiv1(4)\Rightarrow a^2+9\equiv10\ (4)\Rightarrow a^2+9\equiv2\ (4)$
3. si a est une solution de (E) alors (d'après 1. et 2.) $a^2+9\equiv2\ (4)$

   D'autre part si a est une solution de (E) alors $a^2+9=2^n$ avec n>3 ce qui entraine Que a^2+9 est un multiple de 4 c-a-d $a^2+9\equiv0\ (4)$ d'où l'absurdité

   Conclusion : (E) n'admet pas de solution

EX48 :

1. a solution de (E) $\Rightarrow a^2+9=3^n\Rightarrow a^2$ pair $\Rightarrow$ a pair$\Rightarrow a\equiv0(2)$
2. $a\equiv0(2)\Rightarrow a=2k\Rightarrow a^2=4k^2\Rightarrow a^2\equiv0(4)\Rightarrow a^2+9\equiv9\ (4)\Rightarrow a^2+9\equiv1\ (4)$
3. n impair $\Rightarrow n=2k+1\Rightarrow 3^n=3^{2k}.3=9^k.3\equiv1^k.3\ (4)\Rightarrow 3^n\equiv3\ (4)$
4. si a est une solution de (E) alors (d'après 1. et 2.) $a^2+9\equiv1\ (4)$

   D'autre part si a est une solution de (E) alors $a^2+9=3^n\equiv3\ (4)$ Absurde

   Conclusion : (E) n'admet pas de solution

CH7 DIVISIBILITE DANS Z

EX 46 :

a/ • pour n=1 $16^n=16$ et $1-10n=1-10=-9$

et comme $16\equiv -9(25)$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

• Soit $n\in IN^*$ Supposons que $16^n\equiv 1-10n(25)$ et montrons que $16^{n+1}\equiv 1-10(n+1)(25)$

$16^n\equiv 1-10n(25)\Rightarrow 16^{n+1}\equiv 16-160n(25)$

$\equiv 1-10(n+1)+25-150n(25)$

$\equiv 1-10(n+1)(25)$ (car 25 et 150n sont des multiples de 25)

b/ • pour n=1 $7^n=7$ et $6n+1=7$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

• Soit $n\in IN^*$ Supposons que $7^n\equiv 6n+1(36)$ et montrons que $7^{n+1}\equiv 6(n+1)+1(36)$

$7^n\equiv 6n+1(36)\Rightarrow 7^{n+1}\equiv 42n+7(36)$

$\equiv 6(n+1)+1+36n\ (36)$

$\equiv 6(n+1)+1(36)$

c/ • pour n=1 $4^n=4$ et $3n+1=4$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

• Soit $n\in IN^*$ Supposons que $4^n\equiv 3n+1(9)$ et montrons que $4^{n+1}\equiv 3(n+1)+1(9)$

$4^n\equiv 3n+1(9)\Rightarrow 4^{n+1}\equiv 12n+4(9)$

$\equiv 3(n+1)+1+9n\ (9)$

$\equiv 3(n+1)+1(9)$

d/ • pour n=1 $2^n+3^n=5$ et $5^n=5$ Donc la propriété est vrai à l'ordre initial

• Soit $n\in IN^*$ Supposons que $2^n+3^n\equiv 5^n\ (6)$ et montrons que $2^{n+1}+3^{n+1}\equiv 5^{n+1}\ (6)$

$2^n+3^n\equiv 5^n\ (6)\Rightarrow (2^n+3^n).(2+3)\equiv 5^{n+1}\ (6)$

$\Rightarrow 2^{n+1}+3^{n+1}+2^n.3+3^n.2\equiv 5^{n+1}\ (6)$

$\Rightarrow 2^{n+1}+3^{n+1}\equiv 5^{n+1}\ (6)$ (car $2^n.3$ et $3^n.2$ sont des multiples de 6)

EX 49 :

1. $5.2^7+1=5\ .\ 128+1=641$ et $5^4+2^4=625+16=641$

2. $5.2^7+1=641\Rightarrow 5.2^7+1\equiv 0(641)\Rightarrow 5.2^7\equiv -1(641)\Rightarrow 5^4.2^{28}\equiv (-1)^4\ (641)$

$\Rightarrow 5^4.2^{28}\equiv 1\ (641)$

$5^4+2^4=641\Rightarrow 5^4+2^4\equiv 0(641)\Rightarrow 5^4.\equiv -2^4\ (641)$

3. On a $(5^4.2^{28}\equiv 1\ (641)$ et $5^4.\equiv -2^4\ (641)\ )\Rightarrow -2^4.2^{28}\equiv 1(641)$

$\Rightarrow -2^{32}-1\equiv 0(641)$

$\Rightarrow 2^{32}+1\equiv 0(641)$

Donc 641 divise $2^{32}+1$

CH7 DIVISIBILITE DANS Z

EX 50 :

1. supposons $n=a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1 a_0 = a_0+a_1.10+a_2.10^2+\ldots+a_n.10^n \Rightarrow f(n)= a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$

   $\Rightarrow n-f(n)= a_1.(10-1)+a_2.(10^2-1)+\ldots+a_n.(10^n-1)$ or on peut montrer

   Facilement (par récurrence) que $10^n-1 \equiv 0(9)$ pour tout entier n

   Ce qui donne $n-f(n) \equiv 0(9)$ donc $n \equiv f(n)\ (9)$

2. a/ $4444=493.9+7 \Rightarrow 4444 \equiv 7(9)$

   b/ $3 \times 1481 = 4443$

   c/ on a $4444 \equiv 7(9) \Rightarrow 4444^{4444} \equiv 7^{4443+1}\ (9)$

   $\Rightarrow 4444^{4444} \equiv 7^{3\times 1481+1}\ (9)$

   $\Rightarrow 4444^{4444} \equiv (7^3)^{1481}.7\ (9)$ or $7^3=343 \equiv 1(9)$

   $\Rightarrow 4444^{4444} \equiv 7\ (9)$

   d/ on a $N \equiv 7\ (9)$ alors (d'après 1.) $f(N) \equiv 7\ (9)$ et $f(f(N)) \equiv 7\ (9)$

3. a/ on a $4444 < 10^4 \Rightarrow 4444^{4444} < (10^4)^{4444} < (10^4)^{5.1000} = 10^{20\,000}$

   donc $N<10^{20\,000} \Rightarrow f(N)< 9+9+9+\ldots+9 = 9 . 20\,000 = 180\,000$

   b/ on a $f(N)<180\,000 \Rightarrow f(f(N))<9+9+9+9+9+9=9.6=54$

4. on a $f(f(N))<54 \Rightarrow f(f(f(N)))<5+9=12$ et comme $f(f(f(N))) \equiv 7(9)$ Alors $f(f(f(N)))=7$